ΕΞΕΤΑΣΗ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

Η Γη θεωρείται ως συμπαγής κύλινδρος με ακτίνα βάσης R και ύψος H με $H < R$. Οι βάσεις της Γης είναι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας R. Επομένως η Γη διαθέτει έναν άξονα συμμετρίας και ένα επίπεδο συμμετρίας, παράλληλο στις βάσεις τις. Η συμμετρία είναι τόσο γεωμετρική όσο και υλική. Διευκρινίζονται τα εξής:

- Γεωμετρική συμμετρία σημαίνει ότι το συμμετρικό ενός σημείου της Γης, ως προς ένα άλλο σημείο, έναν άξονα ή ένα επίπεδο, είναι επίσης σημείο της Γης.
- Υλική συμμετρία σημαίνει ότι σε συμμετρικά σημεία, η πυκνότητα της Γης λαμβάνει την ίδια τιμή.

1. Ορισμοί

Άξονας Γης: Ο άξονας συμμετρίας του κυλίνδρου της Γης ονομάζεται άξονας της Γης. Ο άξονας της Γης είναι και άξονας υλικής συμμετρίας, εκτός από άξονας γεωμετρικής συμμετρίας.

Επιφάνεια Γης: Η κυλινδρική Γη έχει 2 κυκλικές βάσεις, τα επίπεδα των οποίων είναι παράλληλα. Η μία από αυτές αποτελεί την επιφάνεια της Γης και ονομάζεται βάση 1. Η άλλη βάση της κυλινδρικής Γης ονομάζεται βάση 2. Στην επιφάνεια της Γης βρίσκονται οι ήπειροι και οι ωκεανοί.

Κέντρο Γης: Ο άξονας της Γης τέμνει κάθετα τις βάσεις 1 και 2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Το κέντρο της Γης ορίζεται ως μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και συμβολίζεται με το γράμμα Ο. Το κέντρο της Γης είναι κέντρο γεωμετρικής και υλικής συμμετρίας της Γης.

Βόρειος Πόλος: Το σημείο τομής του άξονα της Γης με την επιφάνεια της Γης (σημείο Α).

Νότιος Πόλος: Η περιφέρεια της βάσης 1 αντιστοιχεί στο Νότιο Πόλο. Πρόκειται για κύκλο με κέντρο το Βόρειο Πόλο και ακτίνα ίση με την ακτίνα της Γης.

Οριζόντιο επίπεδο: Κάθε επίπεδο, που είναι παράλληλο στην επιφάνειας της Γης, ονομάζεται οριζόντιο επίπεδο. Επίσης, η επιφάνεια της Γης είναι οριζόντιο επίπεδο.

Κατακόρυφο επίπεδο: Κάθε επίπεδο, που είναι κάθετο στην επιφάνεια της Γης, ονομάζεται κατακόρυφο επίπεδο.

Κεντρικό κατακόρυφο επίπεδο: Κάθε κατακόρυφο επίπεδο, που διέρχεται από τον άξονα της Γης, ονομάζεται κεντρικό κατακόρυφο επίπεδο.

Μέσο επίπεδο: Το οριζόντιο επίπεδο, που διέρχεται από το κέντρο της Γης, ονομάζεται μέσο επίπεδο. Το μέσο επίπεδο είναι επίπεδο γεωμετρικής και υλικής συμμετρίας της Γης.

Οριζόντια διεύθυνση: Κάθε ευθεία, που ανήκει στην επιφάνεια της Γης, ονομάζεται οριζόντια ευθεία και ορίζει μοναδική οριζόντια διεύθυνση.

Κατακόρυφη διεύθυνση: Κάθε ευθεία, που είναι κάθετη στην επιφάνεια της Γης, ονομάζεται κατακόρυφη ευθεία και ορίζει μοναδική κατακόρυφη διεύθυνση.

Παράλληλος: Κάθε κύκλος στην επιφάνεια της Γης, που έχει κέντρο το Βόρειο Πόλο και ακτίνα μικρότερη από ή ίση με την ακτίνα της Γης, ονομάζεται παράλληλος.

Μεσημβρινός: Κάθε διάμετρος στην επιφάνεια της Γης ονομάζεται μεσημβρινός.

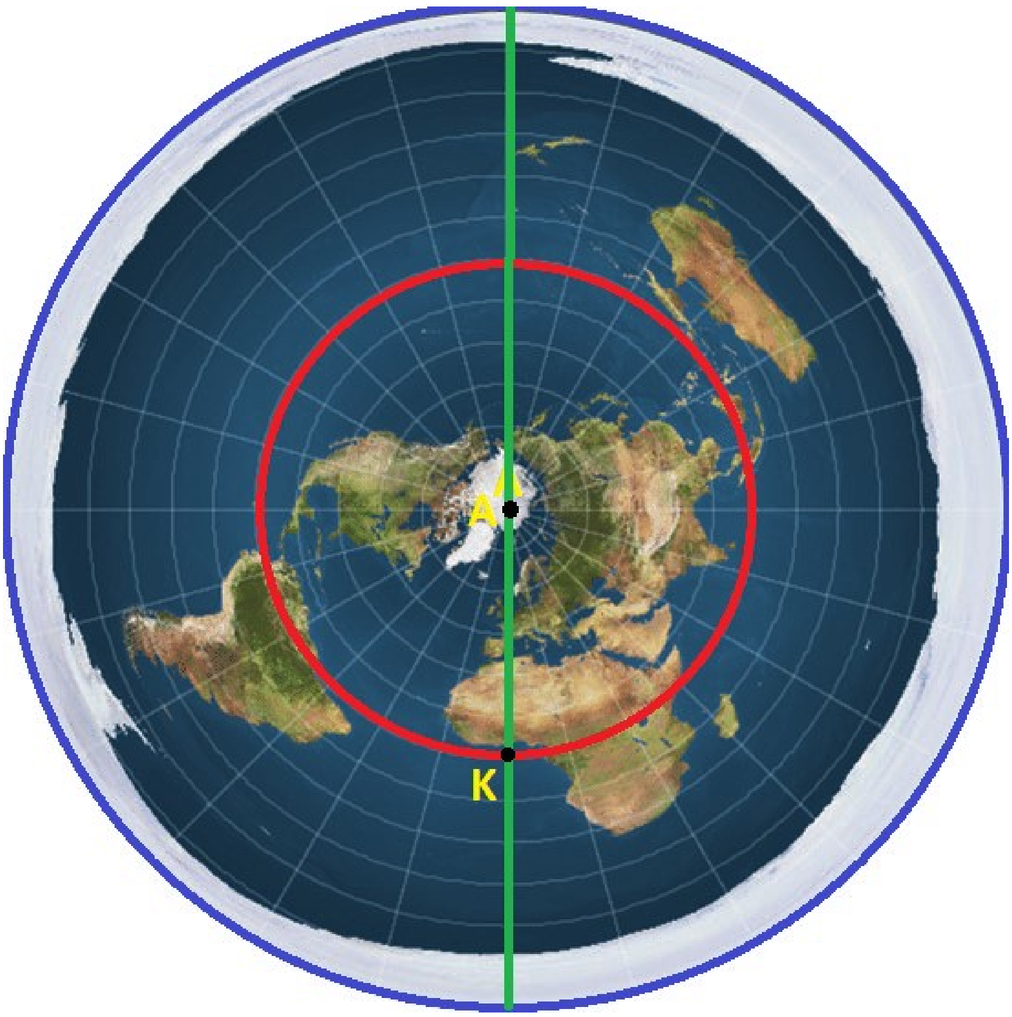
Ημιμεσημβρινός: Κάθε ακτίνα στην επιφάνεια της Γης ονομάζεται ημιμεσημβρινός.

Ισημερινός: Ο παράλληλος, που έχει ακτίνα ίση με το ήμισυ της ακτίνας της Γης.

Πρώτος μεσημβρινός: Ο μεσημβρινός που διέρχεται από το αστεροσκοπείο του Greenwich.

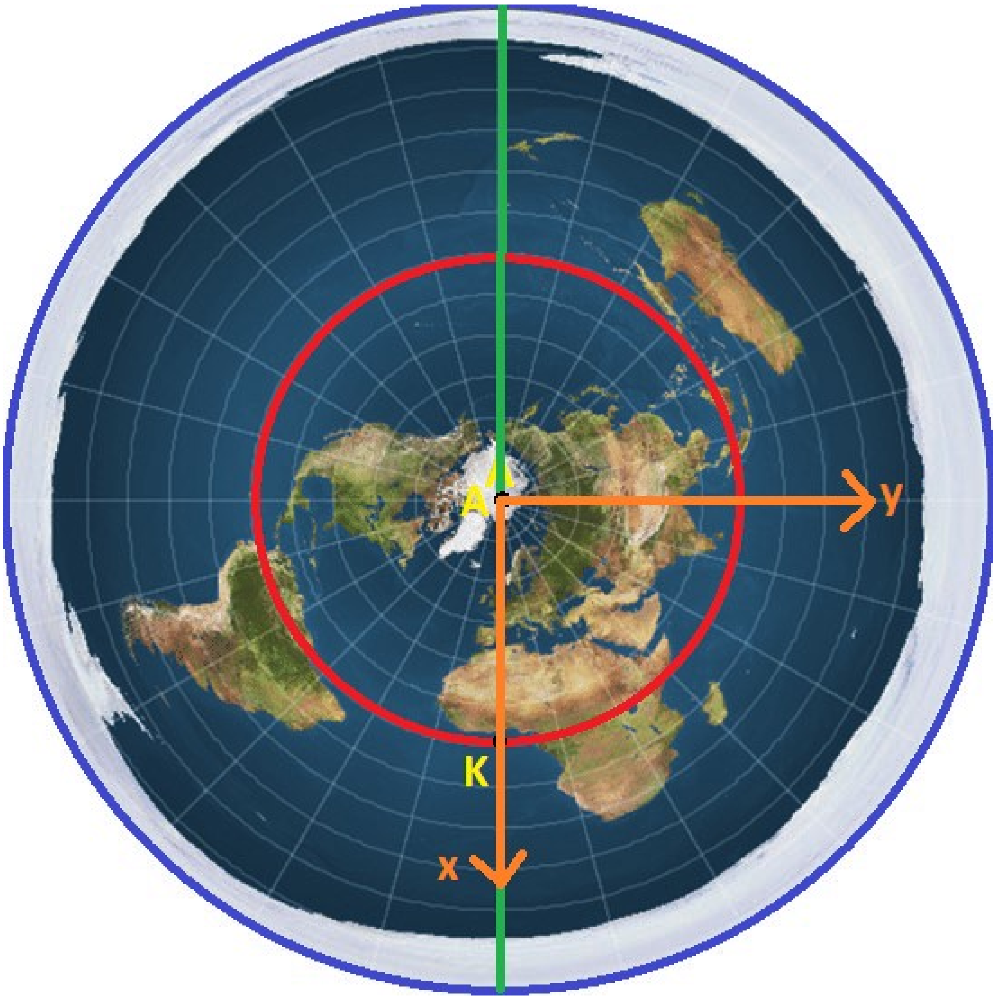
Γεωγραφική Αφετηρία: Ο ισημερινός και ο πρώτος μεσημβρινός τέμνονται σε 2 σημεία. Το ένα από αυτά βρίσκεται στη θάλασσα πλησίον της Αφρικανικής Ηπείρου. Το σημείο αυτό ονομάζεται γεωγραφική αφετηρία και συμβολίζεται με το γράμμα Κ.

Στο ακόλουθο σχήμα, με μπλε χρώμα έχει σχεδιαστεί ο Νότιος Πόλος, με κόκκινο χρώμα ο ισημερινός και με πράσινο χρώμα ο πρώτος μεσημβρινός. Σημειώνονται επίσης τα σημεία Α (Βόρειος Πόλος) και Κ (Γεωγραφική Αφετηρία).



2. Γεωγραφικές συντεταγμένες

Θεωρείται ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz. Το επίπεδο Oxy είναι το μέσο επίπεδο. Ο άξονας x είναι οριζόντιος, παράλληλος στον πρώτο μεσημβρινό και έχει θετική φορά εκείνη που ορίζεται από το σημείο Α προς το σημείο Κ. Ο άξονας y είναι οριζόντιος, κάθετος στον άξονα x και έχει θετική φορά από το σημείο Α προς την Ασιατική ήπειρο. Ο άξονας z είναι ο άξονας της Γης και έχει θετική φορά προς την επιφάνεια της Γης. Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάζονται οι προβολές των αξόνων x και y στην επιφάνεια της Γης.

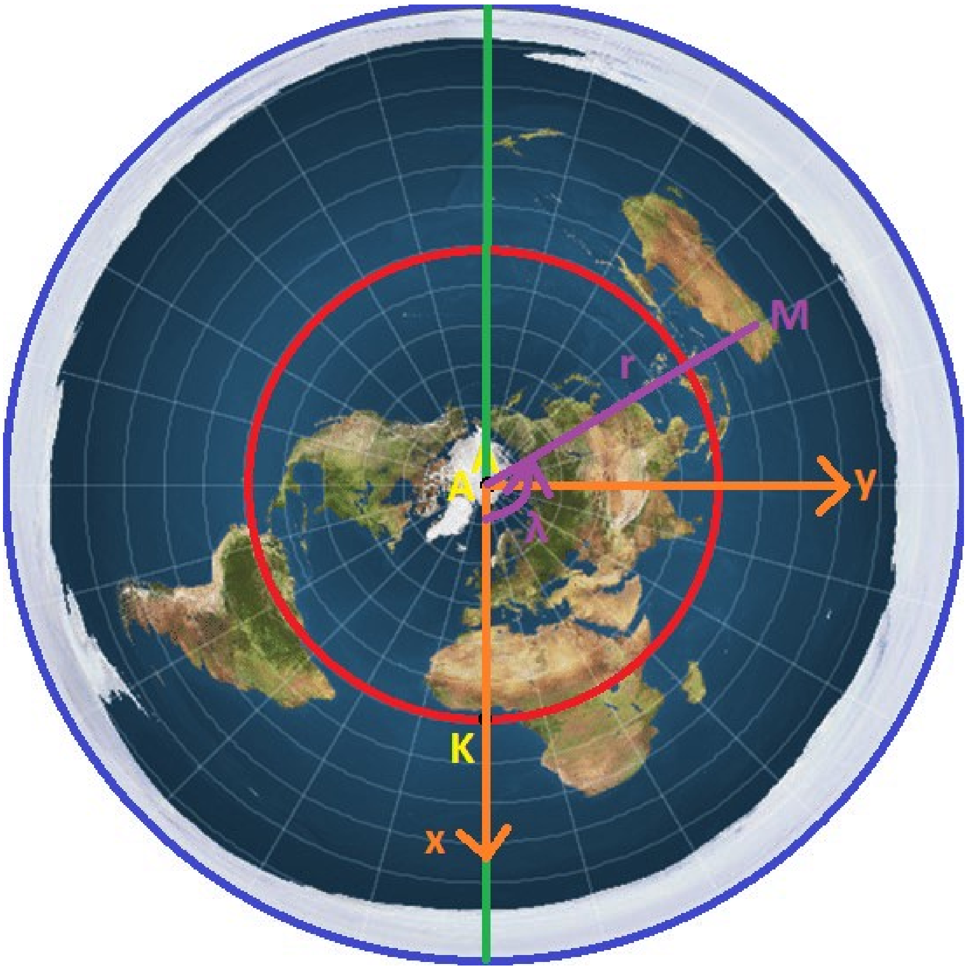


Το σύστημα συντεταγμένων Oxyz είναι δεξιόστροφο. Αυτό σημαίνει πως αν ο θετικός ημιάξονας Ox περιστραφεί δεξιόστροφα κατά μία ορθή γωνία, τότε θα ταυτιστεί με τον θετικό ημιάξονα Oy. Η επιφάνεια της Γης είναι ένας κυκλικός δίσκος. Η θέση ενός σημείου Μ στην επιφάνεια της Γης ορίζεται από τη γεωγραφική απόσταση r και από το γεωγραφικό μήκος λ.

- Η γεωγραφική απόσταση r ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM, δηλαδή $r = (AM)$. Επομένως ισχύει $0 \leq r \leq R$.

- Το γεωγραφικό μήκος είναι η γωνία λ που ορίζεται από την προβολή του θετικού ημιάξονα Ox στην επιφάνεια και της Γης και από την ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο Α και η οποία διέρχεται από το σημείο Μ. Το γεωγραφικό πλάτος θεωρείται θετικό όταν διαγράφεται δεξιόστροφα και αρνητικό όταν διαγράφεται δεξιόστροφα. Λαμβάνει τιμές στο διάστημα $-\pi < \lambda \leq \pi$.

Στο Βόρειο Πόλο είναι $r = 0$ και δεν ορίζεται γεωγραφικό μήκος. Για οποιοδήποτε άλλο σημείο της επιφάνειας της Γης ισχύουν οι ανισότητες $0 < r \leq R$, $-\pi < \lambda \leq \pi$. Το ζεύγος (r, λ) ονομάζονται γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου Μ.



Με γνωστές τις γεωγραφικές συντεταγμένες (r, λ), οποιουδήποτε σημείου στην επιφάνεια της Γης εκτός από το Βόρειο Πόλο, μπορούν να υπολογιστούν οι καρτεσιανές συνταγμένες (x, y) του σημείου αυτού από τις σχέσεις:

$$x = r\cos\lambda$$
$$y = r\sin\lambda$$

Στο Βόρειο Πόλο είναι $r = 0$ και δεν ορίζεται γεωγραφικό μήκος. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του είναι $x = y = 0$. Για οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια της Γης, η τρίτη καρτεσιανή συντεταγμένη z είναι:

$$z = \frac{H}{2}$$

Έτσι λοιπόν ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$r=0 \Leftrightarrow x=y=0$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\lambda \\ y = r\sin\lambda \\ 0 < r \le R, -\pi < \lambda \le \pi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \sin\lambda = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\lambda = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ (x,y) \ne (0,0), 0 \le x^2+y^2 \le R^2 \end{array}\right\}$$

3. Κυλινδρικές συντεταγμένες

- Ένα σημείο Ν της Γης, που βρίσκεται εκτός του άξονα της Γης, ορίζεται από τη γεωγραφική απόσταση r, το γεωγραφικό μήκος λ και το ύψος z από το μέσο επίπεδο, τέτοια ώστε $0 < r \le R$, $-\pi < \lambda \le \pi$, $-\frac{H}{2} \le z \le \frac{H}{2}$.
- Ένα σημείο Σ της Γης πάνω στον άξονα της, ορίζεται για $r = 0$, $-\frac{H}{2} \le z \le \frac{H}{2}$. Για το σημείο Σ δεν ορίζεται γεωγραφικό μήκος.

4. Συμμετρία

Η υλική συμμετρία της Γης συμβαδίζει με τη γεωμετρική της συμμετρία. Επομένως:
- Η Γη, ως συμπαγής κύλινδρος, έχει έναν άξονα συμμετρίας. Η συνάρτηση της πυκνότητας ρ παρουσιάζει επίσης συμμετρίας ως προς τον άξονα της Γης. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητα ρ είναι ανεξάρτητη του γεωγραφικού μήκους λ. Συνεπώς είναι συνάρτηση μόνο της γεωγραφικής απόστασης r και του ύψους z, δηλαδή $\rho(r,z)$.
- Η Γη, ως συμπαγής κύλινδρος, έχει ένα επίπεδο συμμετρίας, που είναι παράλληλο στις βάσεις της. Πρόκειται για το επίπεδο, που είναι παράλληλο στις βάσεις της και το οποίο διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Η συνάρτηση της πυκνότητας είναι συμμετρική ως προς το μέσο επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε z, με $-\frac{H}{2} \le z \le \frac{H}{2}$, ισχύει $\rho(r,-z) = \rho(r,z)$.

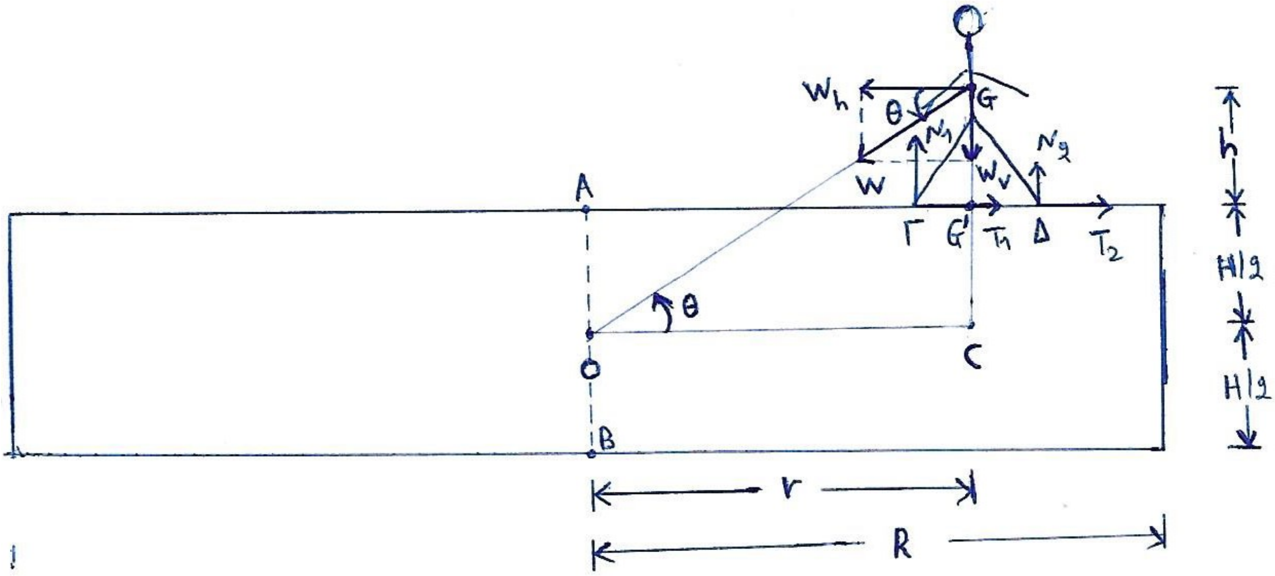
Συνέπεια της συμμετρίας της Γης ως προς τον άξονα της και το μέσο επίπεδο, είναι αυτή να παρουσιάζει γεωμετρική και υλική συμμετρία ως προς το μέσο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Επομένως το κεντροειδές και το κέντρο μάζας της Γης συμπίπτουν με το σημείο Ο. Γι αυτό το λόγο το σημείο Ο ονομάζεται κέντρο της Γης. Μία ακόμα συνέπεια της συμμετρίας της Γης ως προς τον άξονά της και το μέσο επίπεδο, είναι η γεωμετρική και υλική συμμετρία της ως προς οποιοδήποτε κεντρικό κατακόρυφο επίπεδο.

5. Εξέταση ισορροπίας ανθρώπου στην επιφάνεια της Γης

Ένας άνθρωπος στέκεται όρθιος σε κάποια περιοχή της επιφάνειας της Γης, εκτός από το Βόρειο Πόλο. Ο άνθρωπος στέκεται με τέτοιον τρόπο, ώστε η ευθεία που ορίζεται από τις θέσεις έδρασης των ποδιών του να διέρχεται από το Βόρειο Πόλο. Με άλλα λόγια οι θέσεις έδρασης των πελμάτων του ορίζουν ένα μοναδικό μεσημβρινό. Το κέντρο βάρους του G βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Η προβολή του σημείου G στην επιφάνεια της Γης είναι το σημείο G΄. Το πόδι του, που είναι πλησιέστερα στον άξονα της Γης, βρίσκεται στο σημείο Γ της επιφάνειας της Γης.

Το άλλο του πόδι βρίσκεται στο σημείο Δ της επιφάνειας της Γης. Το σημείο C ορίζεται ως η προβολή του σημείου G στο μέσο επίπεδο. Το σημείο Γ απέχει από το σημείο G΄ απόσταση L_1. Το σημείο Δ απέχει από το σημείο G΄ απόσταση L_2.

Το σημείο G΄ έχει γεωγραφική απόσταση r με $0 < r \leq R$, δηλαδή δε συμπίπτει με το σημείο A. Κατά συνέπεια ορίζεται γεωγραφικό μήκος λ για το σημείο G΄. Επομένως τα σημεία Γ, Δ έχουν γεωγραφική απόσταση $r_\Gamma = r - L_1$, $r_\Delta = r - L_2$ αντίστοιχα. Τα σημεία O, C, G, G΄, Γ, Δ ανήκουν στο ίδιο κεντρικό κατακόρυφο επίπεδο, που συμβολίζεται με Π.



Επίπεδο Π

Επειδή το σημείο G δε βρίσκεται στον άξονα της Γης, τότε τα σημεία O, C, G δεν είναι συνευθειακά. Συνεπώς ορίζεται το τρίγωνο $C\overset{\triangle}{O}G$, που είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία τη γωνία $O\hat{C}G$ και κάθετες πλευρές με μήκη $(OC) = r$, $(CG) = h + \frac{H}{2}$. Το μήκος της υποτείνουσας υπολογίζεται με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$(OG) = \sqrt{(OC)^2 + (CG)^2} = \sqrt{r^2 + \left(h + \frac{H}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4r^2 + (2h + H)^2}}{2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας $\theta = C\hat{O}G$.

$$\sin\theta = \frac{(CG)}{(OG)} = \frac{2h + H}{\sqrt{4r^2 + (2h + H)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{(OC)}{(OG)} = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 + (2h + H)^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{(CG)}{(OC)} = \frac{2h + H}{2r}$$

$$\cot\theta = \frac{(OC)}{(CG)} = \frac{2r}{2h+H}$$

Σύμφωνα με το νόμο παγκόσμιας έλξης του Newton, το διάνυσμα του βάρους του ανθρώπου διέρχεται από το κέντρο της Γης. Αυτό σημαίνει ότι έχει φορέα την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία O, G. Η δύναμη του βάρους W αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες, μία κατακόρυφη συνιστώσα W_v με φορά προς την επιφάνεια της Γης και μία οριζόντια συνιστώσα W_h με φορά προς τον άξονα της Γης. Με γνωστούς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ, μπορούν να υπολογιστούν τα μέτρα αυτών των συνιστωσών του βάρους.

$$W_h = W\cos\theta = \frac{2Wr}{\sqrt{4r^2 + (2h+H)^2}}$$

$$W_v = W\sin\theta = \frac{W(2h+H)}{\sqrt{4r^2 + (2h+H)^2}}$$

Η δύναμη του βάρους ασκείται στον άνθρωπο από τη Γη και εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους G του ανθρώπου, με φορά προς το κέντρο της Γης O. Επομένως το διάνυσμα της δύναμης του βάρους βρίσκεται στο επίπεδο Π.
Στα σημεία Γ, Δ, ασκούνται στον άνθρωπο οι αντιδράσεις από το δάπεδο N_1, N_2, οι οποίες έχουν κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα πάνω. Επομένως τα διανύσματα των αντιδράσεων του δαπέδου ανήκουν στο επίπεδο Π.
Εξ αιτίας της οριζόντιας συνιστώσας του βάρους, στον άνθρωπο ασκείται δύναμη τριβής (στατική τριβή) σε κάθε πέλμα του, με αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη της οριζόντιας συνιστώσας του βάρους (δηλαδή προς το Νότιο Πόλο). Επομένως και οι δυνάμεις τριβής ανήκουν στο επίπεδο Π. Στο σημείο Γ ασκείται η δύναμη τριβής T_1 και στο σημείο Δ ασκείται η δύναμη τριβής T_1. Επειδή το δάπεδο έχει ακριβώς την ίδια υφή στα σημεία Γ, Δ και επειδή τα υποδήματα του ανθρώπου είναι τα ίδια και στα 2 πόδια, ο συντελεστής τριβής μ είναι ο ίδιος. Ο συντελεστής τριβής είναι εξ ορισμού θετικός αριθμός. Για όλες τις γνωστές επιφάνειες, έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι ισχύει η ανισότητα $0 < \mu < 2$. Η μέγιστη τιμή του μέτρου των δυνάμεων τριβής, υπολογίζεται από τις σχέσεις $T_{1max} = \mu N_1$, $T_{2max} = \mu N_2$. Επομένως $0 \le T_1 \le \mu N_1$ και $0 \le T_2 \le \mu N_2$.

Εφόσον ο άνθρωπος είναι ακίνητος, τότε ισορροπεί. Σύμφωνα με το νόμο της αδράνειας, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτόν και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου, πρέπει να είναι ίσες με μηδέν.

Εξετάζεται η ισορροπία των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Δ.

$$\sum M_\Delta = 0 \Leftrightarrow -N_1(L_1 + L_2) + W_v L_2 + W_h h = 0 \Leftrightarrow N_1(L_1 + L_2) = W_v L_2 + W_h h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_1 = \frac{W_v L_2 + W_h h}{L_1 + L_2} \Leftrightarrow N_1 = \frac{W\left[(2h+H)L_2 + 2rh\right]}{(L_1 + L_2)\sqrt{4r^2 + (2h+H)^2}}$$

Εξετάζεται η ισορροπία των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Γ.

$$\sum M_{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow N_2\left(L_1 + L_2\right) - W_v L_1 + W_h h = 0 \Leftrightarrow N_2\left(L_1 + L_2\right) = W_v L_1 + W_h h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_2 = \frac{W_v L_1 - W_h h}{L_1 + L_2} \Leftrightarrow N_2 = \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

Για να ισορροπεί ο άνθρωπος πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$. Για κάθε r με $0 < r \leq R$, ισχύει $N_1 > 0$. Στη συνέχεια εξετάζεται η 2η συνθήκη.

$$N_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \left(2h + H\right)L_1 - 2rh \geq 0 \Leftrightarrow 2rh \leq \left(2h + H\right)L_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{\left(2h + H\right)L_1}{2h} \Leftrightarrow L_1 \geq \frac{2hr}{2h + H} \Leftrightarrow L_1 \geq L_{1\min}$$

όπου $L_{1\min}$ η ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή της απόστασης L_1, προκειμένου να ισορροπεί ο άνθρωπος και δίνεται από τη σχέση:

$$L_{1\min} = \frac{2hr}{2h + H}$$

Η συνολική αντίδραση του δαπέδου ισούται με το άθροισμα των 2 επιμέρους αντιδράσεων.

$$N = N_1 + N_2 = \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_2 + 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} + \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} =$$

$$= \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_2 + 2rh\right] + W\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} = \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_2 + 2rh + \left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} =$$

$$= \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_2 + \left(2h + H\right)L_1\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} = \frac{W\left(2h + H\right)\left(L_1 + L_2\right)}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} = \frac{W\left(2h + H\right)}{\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}} = W_v$$

Όπως είναι αναμενόμενο, η συνισταμένη των δυνάμεων στην κατακόρυφη διεύθυνση προκύπτει μηδενική.

$$\sum F_v = N_1 + N_2 - W_v = \left(N_1 + N_2\right) - W_v = N - W_v = W_v - W_v = 0$$

Στη συνέχεια εξετάζεται η ισορροπία των δυνάμεων στην οριζόντια διεύθυνση:

$$\sum F_h = 0 \Leftrightarrow T_1 + T_2 - W_h = 0 \Leftrightarrow T_1 + T_2 = W_h$$

Κάθε μία από τις δυνάμεις στατικής τριβής είναι γραμμικά ανάλογη της συνολικής οριζόντιας εξωτερικής δύναμης, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η οριζόντια συνιστώσα του βάρους.

$$T_1 = \frac{N_1 W_h}{N_1 + N_2} = \frac{N_1 W_h}{N} = \frac{N_1 W_h}{W_v} = N_1 \frac{W_h}{W_v} = N_1 \frac{W\cos\theta}{W\sin\theta} = N_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = N_1 \cot\theta =$$
$$= \frac{2Wr\left[(2h+H)L_2 + 2rh\right]}{(2h+H)(L_1+L_2)\sqrt{4r^2 + (2h+H)^2}}$$

$$T_2 = \frac{N_2 W_h}{N_1 + N_2} = \frac{N_2 W_h}{N} = \frac{N_2 W_h}{W_v} = N_2 \frac{W_h}{W_v} = N_2 \frac{W\cos\theta}{W\sin\theta} = N_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = N_2 \cot\theta =$$
$$= \frac{2Wr\left[(2h+H)L_1 - 2rh\right]}{(2h+H)(L_1+L_2)\sqrt{4r^2 + (2h+H)^2}}$$

Η συνολική δύναμη τριβής ισούται με το άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων τριβής.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{N_1 W_h}{N_1 + N_2} + \frac{N_2 W_h}{N_1 + N_2} = \frac{N_1 W_h + N_2 W_h}{N_1 + N_2} = \frac{(N_1 + N_2) W_h}{N_1 + N_2} = W_h = \frac{2Wr}{\sqrt{4r^2 + (2h+H)^2}}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, η συνισταμένη των δυνάμεων στην οριζόντια διεύθυνση προκύπτει μηδενική.

$$\sum F_h = T_1 + T_2 - W_h = (T_1 + T_2) - W_h = T - W_h = W_h - W_h = 0$$

Από την ανισότητα $T_1 \le \mu N_1$ και λαμβάνοντας υπόψη $N_1 > 0$, προκύπτει:

$$T_1 \le \mu N_1 \Leftrightarrow N_1 \cot\theta \le \mu N_1 \Leftrightarrow \cot\theta \le \mu \Leftrightarrow \mu \ge \cot\theta$$

Λαμβάνοντας υπόψη $N_2 \ge 0$, προκύπτει:

$$\mu \ge \cot\theta \Rightarrow \mu N_2 \ge N_2 \cot\theta \Leftrightarrow \mu N_2 \ge T_2 \Leftrightarrow T_2 \le \mu N_2$$

Συνεπώς:

$$\mu \ge \cot\theta \Leftrightarrow \mu \ge \frac{2r}{2h+H} \Leftrightarrow 2h + H \ge \frac{2r}{\mu} \Leftrightarrow 2h \ge \frac{2r}{\mu} - H \Leftrightarrow 2h \ge \frac{2r - \mu H}{\mu} \Leftrightarrow h \ge \frac{2r - \mu H}{2\mu}$$

Για κάθε γεωγραφική απόσταση r με $0 < r \le \frac{\mu H}{2}$ έχουμε:

$$r \le \frac{\mu H}{2} \Leftrightarrow 2r \le \mu H \Leftrightarrow 2r - \mu H \le 0 \Leftrightarrow \frac{2r - \mu H}{2\mu} \le 0$$

Επειδή $h > 0$ και $\frac{2r - \mu H}{2\mu} \leq 0$, η ανισότητα $h \geq \frac{2r - \mu H}{2\mu}$ ικανοποιείται για κάθε $0 < r \leq \frac{\mu H}{2}$. Για $\frac{\mu H}{2} < r \leq R$, το ύψος του ανθρώπου πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $h \geq h_{min}$, όπου h_{min} η ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή του ύψους του ανθρώπου και δίνεται από τον τύπο:

$$h_{min} = \frac{2r - \mu H}{2\mu}$$

Οι μέγιστες τιμές των μέτρων των δυνάμεων στατικής τριβής υπολογίζονται από τις σχέσεις $T_{1max} = \mu N_1$, $T_{2max} = \mu N_2$. Επομένως:

$$T_{1max} = \frac{\mu W\left[\left(2h + H\right)L_2 + 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$T_{2max} = \frac{\mu W\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

6. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

$$W_h = \frac{2Wr}{\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$W_v = \frac{W\left(2h + H\right)}{\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$N_1 = \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_2 + 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$N_2 = \frac{W\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$T_1 = \frac{2Wr\left[\left(2h + H\right)L_2 + 2rh\right]}{\left(2h + H\right)\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$T_2 = \frac{2Wr\left[\left(2h + H\right)L_1 - 2rh\right]}{\left(2h + H\right)\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{4r^2 + \left(2h + H\right)^2}}$$

$$h_{min} = \frac{2r - \mu H}{2\mu}, \ \frac{\mu H}{2} < r \leq R$$

$$L_{1min} = \frac{2hr}{2h + H}, \ 0 < r \leq R$$

7. Παράδοξα ισορροπίας ανθρώπου στην επίπεδη επιφάνεια της Γης

Από τη μελέτη της ισορροπίας ενός ανθρώπου στην επιφάνεια της Γης, προκύπτουν τα εξής παράδοξα:

- Το ελάχιστο επιτρεπόμενο ύψος του ανθρώπου στον ισημερινό, προκύπτει για $r_{eq} = \frac{R}{2}$, καθώς ισχύει $R > \mu H$. Επομένως προκύπτει η έκφραση:

$$h_{min,eq} = \frac{R - \mu H}{2\mu}$$

Θεωρούνται οι εξής λόγοι:

$$\kappa = \frac{h}{H} \Leftrightarrow H = \frac{h}{\kappa}$$
$$\nu = \frac{H}{R} \Leftrightarrow R = \frac{H}{\nu} \Leftrightarrow R = \frac{h}{\kappa\nu}$$

Σημειώνεται ότι ισχύουν οι ανισότητες $0 < \kappa < 1$, $0 < \nu < 1$. Έτσι λοιπόν, έχουμε:

$$\frac{h_{min,eq}}{h} = \frac{R - \mu H}{2\mu h} = \frac{\frac{h}{\kappa\nu} - \mu\frac{h}{\kappa}}{2\mu h} = \frac{\frac{1}{\kappa\nu} - \frac{\mu}{\kappa}}{2\mu} = \frac{1 - \nu\mu}{2\kappa\nu\mu} = \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{1}{\nu\mu} - 1\right)$$

Για τιμές $\kappa = 0,001$, $\nu = 0,01$, $\mu = 1$ προκύπτει $\frac{h_{min,eq}}{h} = 49.500 > 1$. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει $h < h_{min,eq}$. Αυτό σημαίνει πως οι δυνάμεις στατικής τριβής υπερβαίνουν τη μέγιστη δυνατή τιμή τους, με αποτέλεσμα να μην ικανοποιείται η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην οριζόντια διεύθυνση. Κατά συνέπεια, είναι αδύνατον ο άνθρωπος στην ισημερινό να μείνει ακίνητος και θα εξαναγκαστεί σε μετακίνηση από τη δύναμη της βαρύτητας. Αυτό όμως δε συμβαίνει στην πραγματικότητα, καθώς ένας άνθρωπος στον Ισημερινό μπορεί να σταθεί ακίνητος.

- Ένας άνθρωπος βρίσκεται σε θέση με γεωγραφική απόσταση $r = \frac{\mu H}{2}$. Σε αυτήν τη γεωγραφική θέση δεν τίθεται ζήτημα ελάχιστου ύψους του ανθρώπου. Η ελάχιστη τιμή της απόσταση L_1 είναι:

$$L_{1min} = \frac{2hr}{2h + H} = \frac{\mu h H}{2h + H}$$

Ο άνθρωπος ισορροπεί εφόσον $L_1 \geq L_{1min}$. Λαμβάνοντας υπόψη τις τάξεις μεγέθους των μηκών R, H, h προκύπτει ότι η απόσταση L_{1min} είναι πολύ μεγάλη. Επομένως:

$$L_{1min} = \frac{\mu h}{2\kappa + 1}$$

Για ένα μέσο φυσιολογικό άνθρωπο μπορεί κατά προσέγγιση να θεωρηθεί $h = 1\,m$. Για τιμές των παραμέτρων $\kappa = 0,001$, $\mu = 0,5$ προκύπτει $L_{1min} = 50\,cm$. Συνεπώς, αν ο άνθρωπος ανοίξει τα πόδια του, ώστε $L_1 < 50\,cm$, τότε δεν θα ικανοποιείται η εξίσωση ισορροπίας των ροπών των δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επομένως ο άνθρωπος θα χάσει την ισορροπία του και θα πέσει στο έδαφος, λόγω του βάρους του. Αυτό όμως δε συμβαίνει στην πραγματικότητα, καθώς ένας άνθρωπος μπορεί να σταθεί όρθιος σε οποιοδήποτε χερσαίο τμήμα της επιφάνειας της Γης, ακόμη και αν έχει ανοίξει ελάχιστα τα πόδια του.

8. Συμπέρασμα

Για να εξαχθούν τα ανωτέρω συμπεράσματα, έγινε χρήση 3 νόμων της κλασικής φυσικής:

- Νόμος παγκόσμιας έλξης του Newton
- Νόμος ισορροπίας στερεού σώματος
- Νόμος στατικής τριβής

Εφόσον τα πειραματικά αποτελέσματα και η εμπειρία διαψεύδουν τα εξαγόμενα συμπεράσματα, τότε συντρέχει μία από τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις:

- Η αρχική υπόθεση είναι λανθασμένη. Σε αυτήν την περίπτωση η Γη δε μπορεί να έχει κυλινδρικό σχήμα.
- Δεν ισχύει κάποιος από τους 3 νόμους της κλασικής φυσικής που χρησιμοποιηθήκαν. Όμως οι νόμοι αυτοί έχουν επαληθευτεί πειραματικά.

Εξάγονται παρόμοια συμπεράσματα, αν υποτεθεί ότι η Γη έχει οποιοδήποτε σχήμα με επίπεδη επιφάνεια.